

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

UNIDAD DE CIENCIAS BÁSICAS

CÁLCULO INTEGRAL - MATEMÁTICA II

CICLO II – 2025

Unidad III: Aplicaciones de la integral.

Sólidos de revolución: capas cilíndricas

[1-3] Dibuje el sólido de revolución que se forma al girar la región bajo la gráfica de f sobre el intervalo, alrededor del eje indicado y calcule su volumen utilizando el método de capas cilíndricas.

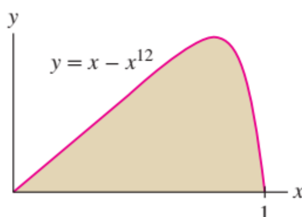
1. $f(x) = x^3$; $[0,1]$, alrededor de $x = 2$
2. $f(x) = x^{-4}$; $[-3,-1]$, alrededor de $x = 4$
3. $f(x) = x^3$; $[0,1]$, alrededor de $x = -2$

[4-6] Dibuje la región encerrada por las gráficas y use el método de capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido que se forma al hacer girar la región alrededor del eje x.

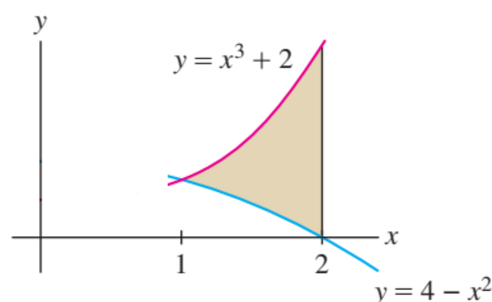
4. $x = y(4 - y), x = 0$
5. $y = 4 - x^2, x = 0, y = 0$, en el primer cuadrante.
6. Use el método del disco y el de capas cilíndricas para escribir la integral que representa el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región bajo la gráfica de $f(x) = 8 - x^3$ para $0 \leq x \leq 2$ alrededor de: (a) el eje x, (b) el eje y. Finalmente, calcule la integral más sencilla.

[7-9] utilice el método más conveniente (discos o capas cilíndricas) para calcular el volumen del sólido de revolución descrito.

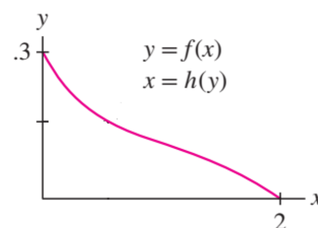
7. La región de la siguiente figura girando alrededor de: (a) el eje x. (b) el eje y.



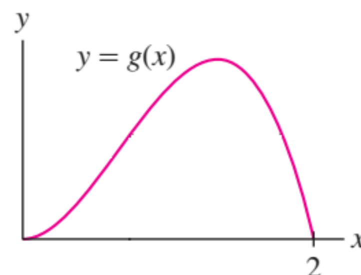
8. La región de la siguiente figura girando alrededor de: (a) $x = 4$. (b) $y = -2$.



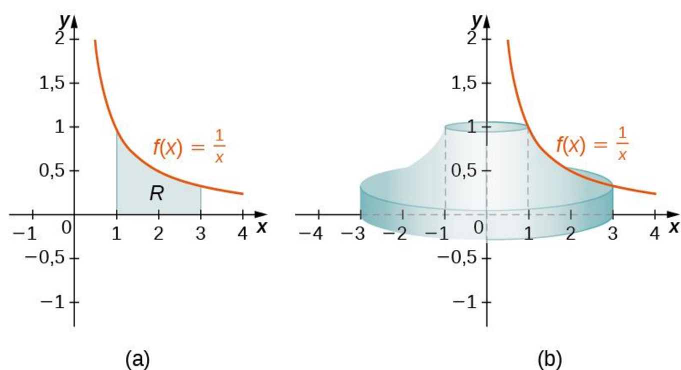
9. La región de la siguiente figura puede ser descrita ya sea por $y = f(x)$ o por $x = h(y)$, donde h es la inversa de f. Sea V el volumen que se obtiene al girar la región alrededor del eje x. Escriba la integral que calcule V (a) por el método del disco. (b) por el método de capas cilíndricas.



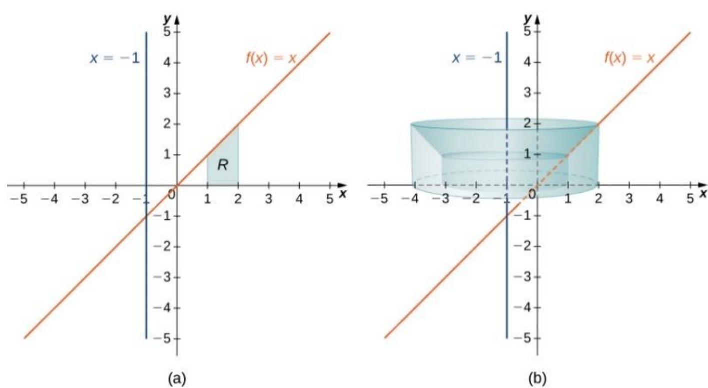
10. Sea W el volumen del sólido que se obtiene al girar la región de la siguiente figura alrededor del eje y. (a) Escriba una integral que proporcione el valor de W utilizando capas cilíndricas. (b) explique la dificultad en calcular W por el método de la arandela.



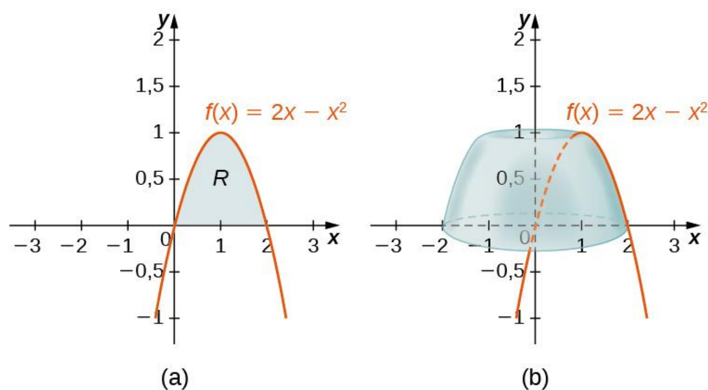
11. Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen de una esfera de radio R.
12. Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido de la siguiente figura.



13. Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido de la siguiente figura



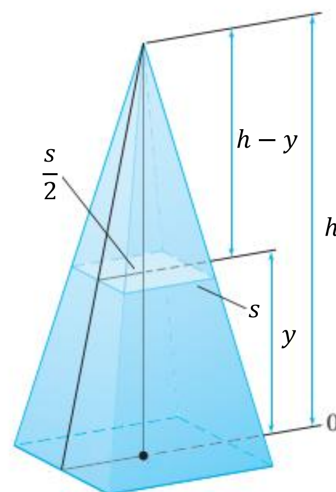
14. Utilice el método de capas cilíndricas para calcular el volumen del sólido de la siguiente figura



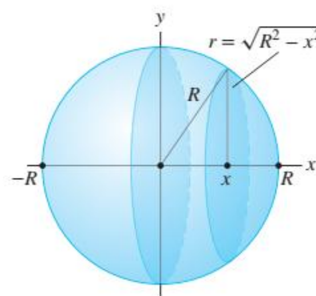
Sólidos con sección conocida.

Aprendizajes esperados: al finalizar con éxito esta unidad los estudiantes serán capaces de aplicar la integral definida para calcular el volumen de sólidos con secciones conocidas.

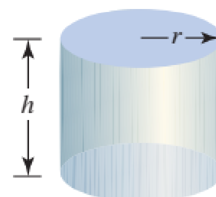
15. Calcule el volumen V de una pirámide de altura h cuya base es un cuadrado de lado ℓ como se muestra en la figura. Considere como sección transversal un cuadrado de lado s. Respuesta: $V = \frac{1}{3}\ell^2 h$



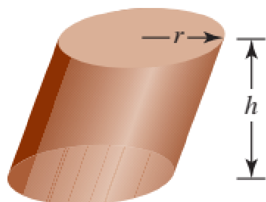
16. Determine el volumen de una esfera de radio R. Una sección transversal perpendicular al eje x es un círculo cuyo radio satisface $x^2 + r^2 = R^2$ como se muestra en la figura. Respuesta: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



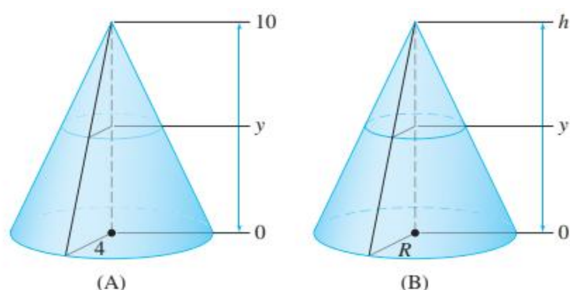
17. Calcule el volumen de un cilindro circular recto como el de la figura



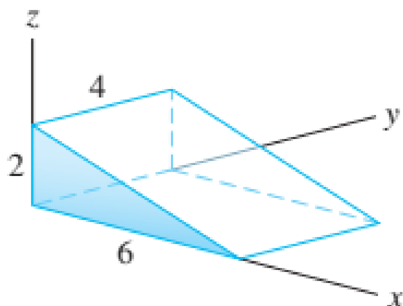
18. Calcule el volumen del cilindro circular de la siguiente figura.



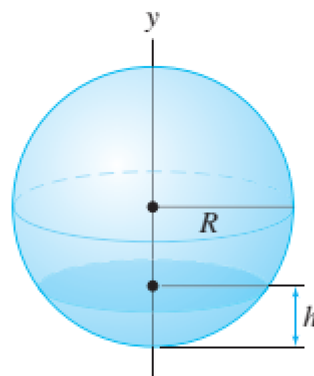
19. Sea V el volumen de un cono circular recto de altura 10 cuya base es un círculo de radio 4 (A). (i) Use triángulos semejantes para encontrar el área de una sección transversal horizontal a una altura y. (ii) Encuentre el volumen V integrando la sección transversal. (iii) Encuentre la fórmula para el volumen de un cono circular recto de altura h y radio R (B).



20. Calcule el volumen de la rampa de la figura integrando la sección transversal de tres maneras: (i) Perpendicular al eje x (rectángulos). (ii) Perpendicular al eje y (triángulos) y (iii) perpendicular al eje z (rectángulos).



21. Encuentre la cantidad de líquido necesaria para llenar una esfera de radio R hasta una altura h.



[22-25] Calcule el volumen del sólido con la base y sección transversal dada.

22. La base es el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, y las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos cuya base y altura son iguales. Respuesta: $\frac{8}{3}$.

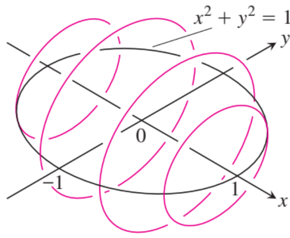
23. La base es el semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$, para $0 \leq x \leq 3$. Las secciones transversales al eje x son cuadrados. Respuesta: 18

24. La base es la región encerrada por $y = x^2$ y $y = 3$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son cuadrados. Respuesta: 18.

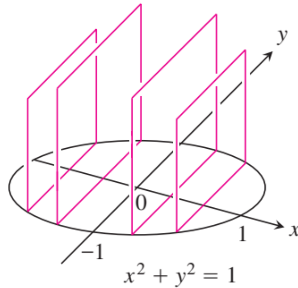
25. La base es la región $|x| + |y| \leq 1$, y las secciones transversales perpendiculares al eje y son semicírculos (con diámetros a lo largo de la base). Respuesta: $\frac{\pi}{3}$

[26-28] Encuentre una fórmula para el área $A(x)$ de la sección transversal del sólido que es perpendicular al eje x y luego utilícela para calcular su volumen. El sólido se encuentra entre planos perpendiculares al eje x entre $x = -1$ y $x = 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos se extienden desde el semicírculo $y = -\sqrt{1 - x^2}$ hasta el semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$

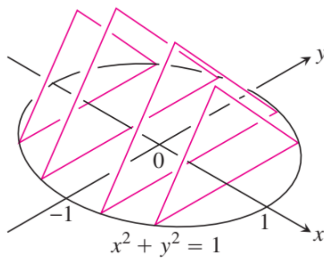
26. Las secciones transversales son discos circulares con diámetros en el plano xy.



27. Las secciones transversales con cuadrados con base en el plano xy

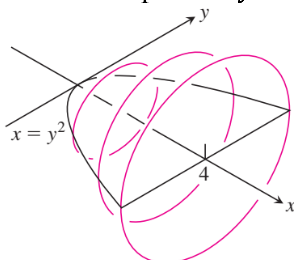


28. Las secciones transversales son triángulos equiláteros con base en el plano xy.

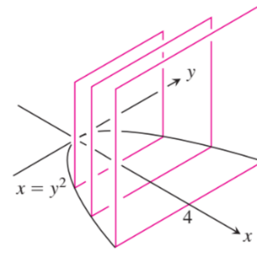


[29-31] Encuentre una fórmula para el área $A(x)$ de la sección transversal del sólido que es perpendicular al eje x y luego utilícela para calcular su volumen. El sólido se encuentra entre planos perpendiculares al eje x entre $x = 0$ y $x = 4$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x entre estos planos se extienden desde $y = -\sqrt{x}$ hasta $y = \sqrt{x}$.

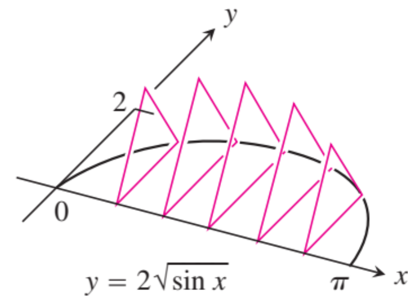
29. Las secciones transversales son discos circulares con diámetros en el plano xy.



30. Las secciones transversales son cuadrados con base en el plano xy



31. Las secciones transversales son triángulos equiláteros con base en el plano xy (haga el esquema).
32. La base de un sólido es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\sin x}$ en para $0 \leq x \leq \pi$. Las secciones transversales perpendiculares al eje x son triángulos equiláteros que se extienden desde el eje x hasta la curva. Calcule el volumen del sólido.



33. La base del sólido es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y entre $y = -1$ y $y = 1$ son triángulos isósceles con un lado en el disco. Calcule el volumen.

